DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2017. 04. 005

具有半正非线性项的一阶离散分数阶边值问题的正解*

程伟，徐家发
（重庆师范大学数学科学学院，重庆 401331）

摘　要：研究具有半正非线性项的一阶离散分数阶边值问题。借助与格林函数相关的不等式，在非线性项超线性、次线性增长的条件下，运用不动点指数获得该问题正解的存在性，推广和完善了已有的一些结果。

关键词：离散分数阶边值问题；不动点指数；正解；半正非线性项
中图分类号：O175. 2　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2017）04－0023－05

Positive solutions for a first-order discrete fractional boundary value problem with semipositone nonlinearity

CHENG Wei，*XU Jiafa*
（School of Mathematical Sciences，Chongqing Normal University，Chongqing 401331，China）

Abstract：A first-order discrete fractional boundary value problem with semipositone nonlinearity is studied. By virtue of some inequalities associated with Green function，and using the fixed point index，the existence of positive solutions is obtained for the problem，with the nonlinearity grows both superlinearly and sublinearly. The results extend known results.

Key words：discrete fractional boundary value problem；fixed point index；positive solution；semipositone nonlinearity

近年来分数阶问题掀起了研究的热潮。数学家们研究发现运用分数阶模型能更精确地模拟现实问题，在分形和多孔介质中的弥散、电容理论、电解化学、半导体物理、湍流、凝聚态物理、黏弹性理论、生物数学及统计力学中有广泛应用。然而我们注意到，目前所涉及到的问题几乎都是微分方程，对于分数差分方程却鲜有问津。郑祖庥教授[1-2]指出：“对于分数微分方程来说，离散化或者问题提出时便是离散的分数差分方程是不可避免的。迄今只作为近似解计算的出发点，没有对分数差分方程的专门研究，因此，无论从理论还是应用的角度看，这都是极大的缺憾”。然而，近期已有许多学者致力于研究分数阶差分方程[2-10]，程金发在其专著[2]中系统总结了该方向的相关成果，为后续研究奠定了基础。

另一方面，运用微分方程刻画和模拟现实世界中的诸多实际问题，需要考虑大量不确定的物理变量、参数以及扰动因素等的影响。例如荷兰化学家 Aris 在研究化学反应时，发现一些惰性材料、催化剂等对整个反应起到加速或抑制的作用，从而在所对应的微分方程中自然含有某个扰动项，即非线性项具有形式$f(t,x) \geqslant -M, M>0$，这就是数学模型中的半正问题。该类问题来源于现实生活，所以对这些具体或抽象的变号非线性微分方程及系统模型

* 收稿日期：2016－12－16
基金项目：国家自然科学基金（11601048）；重庆市基础与前沿研究计划资助项目（cstc2016jcyjA0181）；重庆市教委科学技术研究项目（KJ1703050）；重庆师范大学项目（15XLB011，16XYY24）
作者简介：程伟（1985 年生），男；研究方向：微分方程、拓扑动力系统；E-mail：1375415619@qq. com
通信作者：徐家发（1986 年生），男；研究方向：微分方程、非线性泛函分析；E-mail：xujiafa292@sina. com

中的数学问题的研究无疑具有现实背景和应用价值。

本文基于以上两个方面，运用不动点指数研究如下具有半正非线性项的离散分数阶边值问题正解的存在性：

$$\begin{cases}\Delta^{\nu}y(t) = f(t+\nu-1, y(t+\nu-1)), \\ \qquad t \in [0,T]_Z, \\ y(\nu-1) = y(\nu+T)\end{cases} \tag{1}$$

其中 Δ^{ν} 是一离散分数阶算子, $0 < \nu < 1, \nu \in \mathbf{R}$, $[0,T]_Z = [0,T] \cap \mathbf{Z}$ 且非线性项 f 满足：

(H1) $f \in C([\nu-1, \nu+T-1]_{Z_{\nu-1}} \times \mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ 且存在一正数使得

$$f(t,y) \geqslant -M, \forall (t,y) \in [\nu-1, \nu+T-1]_{Z_{\nu-1}} \times \mathbf{R}^+$$

其中 $Z_{\nu-1} = \{\nu-1, \nu, \cdots\}$。

1 基础知识及主要结论

首先给出离散分数阶计算的相关定义及基本知识，详细内容参见文献［2-3］。

定义 1 对任意有意义的 t,ν，定义 $t^{\bar{\nu}} = \dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\nu)}$。如果 $t+1-\nu$ 是伽马函数的一个奇点且 $t+1$ 不是奇点，则 $t^{\bar{\nu}} = 0$。

定义 2 当 $\nu > 0$ 时，函数 f 的 ν 阶和分定义为

$$\Delta^{-\nu}f(t;a) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=a}^{t-\nu}(t-s-1)^{\overline{\nu-1}}f(s), t \in \mathbf{N}_{a+\nu}$$

并且当 $\nu > 0$ 时，定义 f 的 ν 阶分数差分为

$$\Delta^{\nu}f(t) = \Delta^{N}\Delta^{\nu-N}f(t)$$

其中 $t \in \mathbf{N}_{a+\nu}$, N 是自然数且满足 $0 \leqslant N-1 < \nu \leqslant N$。

以下研究问题（1）的格林函数及其性质。定义 $G: [\nu-1, \nu+T-1]_{Z_{\nu-1}} \times [0,T]_Z \to (0, +\infty)$ 如下：

$$G(t,s) = \begin{cases}\dfrac{(\nu+T-s-1)^{\overline{\nu-1}}t^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}} + (t-s-1)^{\overline{\nu-1}}, \\ \qquad 0 \leqslant s \leqslant t-\nu \leqslant T, \\ \dfrac{(\nu+T-s-1)^{\overline{\nu-1}}t^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}, \quad t-\nu < s \leqslant T\end{cases} \tag{2}$$

令 $C* = 1 + \dfrac{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}{(\nu+T-1)^{\overline{\nu-1}}}$，则根据文［4］中的引理 5 可得 G 满足如下不等式

$$0 < \frac{(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}(\nu+T-s-1)^{\overline{\nu-1}} \leqslant G(t,s) \leqslant \frac{C*\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}(\nu+T-s-1)^{\overline{\nu-1}} \tag{3}$$

令 $\varphi(t+\nu-1) = (\nu+T-t-1)^{\overline{\nu-1}}, t \in [0,T]_Z$，注意到

$$\sum_{t=\nu-1}^{\nu+T-1}\frac{G(t,s)}{\Gamma(\nu)}\varphi*(t) = \sum_{t=0}^{T}\frac{G(t+\nu-1,s)}{\Gamma(\nu)}\varphi(t+\nu-1)$$

其中 $\varphi*(t) = (2\nu+T-t-2)^{\overline{\nu-1}}, t \in [\nu-1, \nu+T-1]_Z$，则对任意的 $s \in [0,T]_Z$，有

$$\sum_{t=0}^{T}\frac{(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)(\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}})} \cdot \varphi(t+\nu-1) \cdot \varphi(s+\nu-1) \leqslant \sum_{t=\nu-1}^{\nu+T-1}\frac{G(t,s)}{\Gamma(\nu)}\varphi*(t) \leqslant \sum_{t=0}^{T}\frac{C*}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}} \cdot \varphi(t+\nu-1) \cdot \varphi(s+\nu-1) \tag{4}$$

为了方便，令

$$k_1 = \sum_{t=0}^{T}\frac{(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)(\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}})}\varphi(t+\nu-1),$$

$$k_2 = \sum_{t=0}^{T}\frac{C*}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}\varphi(t+\nu-1)$$

令 E 是从 $[\nu-1, \nu+T-1]_{Z_{\nu-1}}$ 到实数集的全体映射构成的集合，并在其上赋予通常的最大模范数则 $(E, \|\cdot\|)$ 是一 Banach 空间。考虑定义其上的锥 $K \subset E$ 为

$$K = \left\{y \in E: y(t) \geqslant \frac{(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}{C*\Gamma(\nu)}\|y\|, \; t \in [\nu-1, \nu+T-1]_{Z_{\nu-1}}\right\}$$

以下证明存在足够大的 $M_1 > 0$，当 $y \in K$, $\|y\| \geqslant M_1$ 时，有

$$\min_{t \in [\nu-1, \nu+T-1]_{Z_{\nu-1}}}(y-w)(t) \geqslant 0 \tag{5}$$

其中 w 是以下辅助问题的解

$$\begin{cases}\Delta^{\nu}w(t) = M, \\ w(\nu-1) = w(\nu+T)\end{cases} \tag{6}$$

根据文［4］的讨论知，问题（6）的解可以表示为

$$w(t) = M\sum_{s=0}^{T}\frac{G(t,s)}{\Gamma(\nu)} \tag{7}$$

从而可得

$$w(t) \leqslant \frac{C*M}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}\sum_{s=0}^{T}(\nu+T-s-1)^{\overline{\nu-1}}$$

因此，若 $y \in K$，取

$$M_1 = \frac{(C*)^2 M\Gamma(\nu)}{(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}(\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}})} \cdot \sum_{s=0}^{T}(\nu+T-s-1)^{\overline{\nu-1}}$$

则对任意的 $[\nu-1, \nu+T-1]_{Z_{\nu-1}}$，当 $\|y\| \geqslant M_1$ 时，有

$$y(t)-w(t)\geqslant\frac{(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}{C*\Gamma(\nu)}\|y\|-\sum_{s=0}^{T}\frac{C*M(\nu+T-s-1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}\geqslant 0$$

为了获得问题（1）正解的存在性，需考虑如下

$$\begin{cases}\Delta^{\nu}y(t)=f(t+\nu-1,\max\{y(t+\nu-1)-w(t+\nu-1),0\})+M, & t\in[0,T]_Z,\\ y(\nu-1)=y(\nu+T)\end{cases}\tag{8}$$

其中 w 由式（7）定义。容易证明：

（i）若 y 和 w 分别是问题（8）和问题（6）的解，并且对任意的 $t\in[\nu-1,\nu+T-1]_{Z_{\nu-1}}$，有 $(y-w)(t)\geqslant 0$，则 $y(t)-w(t)$ 是问题（1）的正解；

（ii）若 y 是问题（1）的正解，则 $y(t)+w(t)$ 是问题（8）的正解。因此，只需找寻问题（8）的且超过 w 的解。

定义算子 $A:E\to E$ 如下

$$(Ay)(t)=\sum_{s=0}^{T}\frac{G(t,s)}{\Gamma(\nu)}[f(s+\nu-1,\max\{y(s+\nu-1)-w(s+\nu-1),0\})+M]$$

则根据 Arzelà－Ascoli 定理可得 A 是 E 上的一全连续算子，并且问题（8）解的存在性等价于算子 A 不动点的存在性。注意到式（3），容易证明 $A(K)\subset K$。

引理 1[11]　设 E 为实 Banach 空间，P 为 E 中的锥，Ω 是 E 中的有界开集，$A:\overline{\Omega}\cap P\to P$ 是一全连续算子。若存在 $u_0\in P\setminus\{0\}$ 使得

$$u\neq Au+\lambda u_0,\ \forall u\in\partial\Omega\cap P,\lambda\geqslant 0$$

则 $i(A,\Omega\cap P,P)=0$，其中 i 为锥 P 上的不动点指数。

引理 2[11]　设 E 为实 Banach 空间，P 为 E 中的锥，Ω 是 E 中的有界开集，$0\in\Omega$，$A:\overline{\Omega}\cap P\to P$ 是一全连续算子。若

$$u\neq\lambda Au,\ \forall u\in\partial\Omega\cap P,\lambda\in[0,1]$$

则 $i(A,\Omega\cap P,P)=1$。

最后，列出本文使用的假设条件和主要结论。

（H2）　$\liminf\limits_{y\to+\infty}\dfrac{f*(t,y)}{y}>k_1^{-1}$，对 $t\in[\nu-1,\nu+T-1]_{Z_{\nu-1}}$ 一致成立；

（H3）　对任意的 $(t,y)\in[\nu-1,\nu+T-1]_{Z_{\nu-1}}\times[0,M_1]$，有

$$f*(t,y)<\left[\sum_{s=0}^{T}\frac{C*\Gamma(\nu)(\nu+T-s-1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}\right]^{-1}M_1$$

（H4）　$\limsup\limits_{y\to+\infty}\dfrac{f*(t,y)}{y}<k_2^{-1}$，对 $t\in[\nu-1,\nu+T-1]_{Z_{\nu-1}}$ 一致成立；

（H5）　对任意的 $(t,y)\in[\nu-1,\nu+T-1]_{Z_{\nu-1}}\times[0,M_1]$，有

$$f*(t,y)>\left[\sum_{s=0}^{T}\frac{(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}(\nu+T-s-1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}\right]^{-1}M_1$$

其中，$f*(t,y)=f(t+\nu-1,\max\{y(t+\nu-1)-w(t+\nu-1),0\})+M$。

定理 1　若条件（H1）－（H3）满足，则问题（1）至少有一个正解。

定理 2　若条件（H1），（H4），（H5）满足，则问题（1）至少有一个正解。

2　主要结论的证明

令

$$B_\rho=\{y\in E:\|y\|<\rho,\rho>0\}$$

定理 1 的证明　根据第一部分的论述，仅需找寻范数超过 M_1 的算子 A 的不动点。

第 1 步：证明存在足够大的 $R>M_1$ 使得

$$y\neq Ay+\lambda y_0,\ \forall y\in\partial B_R\cap K,\lambda\geqslant 0\tag{9}$$

其中 $y_0\in K$ 是一给定元素。事实上，若式（9）不成立，则存在 $y\in\partial B_R\cap K,\lambda_0\geqslant 0$ 使得

$$y=Ay+\lambda_0 y_0$$

由（H2）可知存在 $\varepsilon_1>0,c_1>0$ 使得

$$f*(t,y)\geqslant(k_1^{-1}+\varepsilon_1)y-c_1,\quad\forall(t,y)\in[\nu-1,\nu+T-1]_{Z_{\nu-1}}\times\mathbf{R}^+$$

结合上述两式可得

$$y(t)\geqslant(Ay)(t)\geqslant\sum_{s=0}^{T}\frac{G(t,s)}{\Gamma(\nu)}\cdot[(k_1^{-1}+\varepsilon_1)[y(s+\nu-1)-w(s+\nu-1)]-c_1]$$

在上式两端乘以 $\varphi*(t)$，并在 $\nu-1$ 到 $\nu+T-1$ 上求和，注意到式（4），有

$$\sum_{t=0}^{T}y(t+\nu-1)\varphi(t+\nu-1)=\sum_{t=\nu-1}^{\nu+T-1}y(t)\varphi*(t)\geqslant\sum_{t=\nu-1}^{\nu+T-1}\varphi*(t)\sum_{s=0}^{T}\frac{G(t,s)}{\Gamma(\nu)}[(k_1^{-1}+\varepsilon_1)[y(s+\nu-1)-w(s+\nu-1)]-c_1]\geqslant\sum_{t=0}^{T}k_1\varphi(t+\nu-1)\cdot[(k_1^{-1}+\varepsilon_1)[y(t+\nu-1)-w(t+\nu-1)]-c_1]$$

从而由上式解得

$$k_1\varepsilon_1\sum_{t=0}^{T}y(t+\nu-1)\varphi(t+\nu-1)\leqslant\sum_{t=0}^{T}k_1\varphi(t+\nu-1)[(k_1^{-1}+\varepsilon_1)w(t+\nu-1)+c_1]$$

另一方面，注意到 $y\in K$，有

$$k_1\varepsilon_1\sum_{t=0}^{T}\frac{(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}{C*\Gamma(\nu)}\|y\|\varphi(t+\nu-1)\leqslant$$

$$\sum_{t=0}^{T} k_1\varphi(t+\nu-1)[(k_1^{-1}+\varepsilon_1)w(t+\nu-1)+c_1]$$

从而

$$\|y\| \leqslant \frac{\sum_{t=0}^{T}\varphi(t+\nu-1)[(k_1^{-1}+\varepsilon_1)w(t+\nu-1)+c_1]}{\varepsilon_1\sum_{t=0}^{T}\frac{(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}{C*\Gamma(\nu)}\varphi(t+\nu-1)} := M_2$$

所以当 $R > \max\{M_1, M_2\}$ 时，式（9）成立，从而根据引理 1 知

$$i(A, B_R\cap K, K) = 0 \tag{10}$$

第 2 步：证明

$$y \neq \lambda Ay, \forall y \in \partial B_{M_1}\cap K, \lambda \in [0,1] \tag{11}$$

若上式不成立，则存在 $y \in \partial B_{M_1}\cap K, \lambda_0 \in [0,1]$ 使得 $y = \lambda_0 Ay$，从而 $\|y\| \leqslant \|Ay\|$。然而根据条件（H3），有

$$(Ay)(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=0}^{T}G(t,s)f*(s,y) < \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=0}^{T}\frac{C*\Gamma(\nu)(\nu+T-s-1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}\cdot \left[\sum_{s=0}^{T}\frac{C*\Gamma(\nu)(\nu+T-s-1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}\right]^{-1}M_1 = M_1$$

这表明 $\|Ay\| < \|y\| = M_1, y\in\partial B_{M_1}\cap K$ 矛盾。从而式（11）成立。再由引理 2 知

$$i(A, B_{M_1}\cap K, K) = 1 \tag{12}$$

结合式（10）和式（12），有

$$i(A,(B_R\setminus \overline{B}_{M_1})\cap K,K) = i(A,B_R\cap K,K) - i(A,B_{M_1}\cap K,K) = 0-1=-1\neq 0$$

从而在 $(B_R\setminus \overline{B}_{M_1})\cap K$ 中，算子 A 至少有一个不动点，即问题（8）有一个超过 w 的解 y，这也表明 $y-w$ 是问题（1）的正解。证毕。

定理 2 的证明

第 1 步：证明存在足够大的 $R > M_1$，使得

$$y \neq \lambda Ay, \forall y \in \partial B_R\cap K, \lambda\in[0,1] \tag{13}$$

否则的话，则存在 $y\in\partial B_R\cap K, \lambda_0\in[0,1]$ 使得

$$y = \lambda_0 Ay$$

根据条件（H4），存在 $\varepsilon_2 > 0, c_2 > 0$ 使得

$$f*(t,y) \leqslant (k_2^{-1}-\varepsilon_2)y + c_2,$$
$$\forall (t,y)\in[\nu-1,\nu+T-1]_{Z_{\nu-1}}\times\mathbf{R}^+$$

综上两式可得

$$y(t) \leqslant (Ay)(t) \leqslant \sum_{s=0}^{T}\frac{G(t,s)}{\Gamma(\nu)}[(k_2^{-1}-\varepsilon_2)\cdot[y(s+\nu-1)-w(s+\nu-1)]+c_2] \leqslant \sum_{s=0}^{T}\frac{G(t,s)}{\Gamma(\nu)}[(k_2^{-1}-\varepsilon_2)y(s+\nu-1)+c_2]$$

在上式两端乘以 $\varphi*(t)$，并在 $\nu-1$ 到 $\nu+T-1$ 上求和，并运用式（4），有

$$\sum_{t=0}^{T}y(t+\nu-1)\varphi(t+\nu-1) = \sum_{t=\nu-1}^{\nu+T-1}y(t)\varphi*(t) \leqslant \sum_{t=\nu-1}^{\nu+T-1}\varphi*(t)\sum_{s=0}^{T}\frac{G(t,s)}{\Gamma(\nu)}\cdot [(k_2^{-1}-\varepsilon_2)y(s+\nu-1)+c_2] \leqslant \sum_{t=0}^{T}k_2\varphi(t+\nu-1)[(k_2^{-1}-\varepsilon_2)y(s+\nu-1)+c_2]$$

从而解得

$$\varepsilon_2\sum_{t=0}^{T}y(t+\nu-1)\varphi(t+\nu-1) \leqslant c_2\sum_{t=0}^{T}\varphi(t+\nu-1)$$

另一方面，注意到 $y\in K$，有

$$\varepsilon_2\sum_{t=0}^{T}\frac{(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}{C*\Gamma(\nu)}\|y\|\varphi(t+\nu-1) \leqslant c_2\sum_{t=0}^{T}\varphi(t+\nu-1)$$

从而

$$\|y\| \leqslant \frac{c_2C*\Gamma(\nu)}{\varepsilon_2(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}} := M_3$$

所以当 $R > \max\{M_1, M_3\}$ 时，式（13）成立，从而根据引理 2 知

$$i(A,B_R\cap K,K) = 1 \tag{14}$$

第 2 步：证明

$$y \neq Ay+\lambda y_0, \forall y\in\partial B_{M_1}\cap K, \lambda \geqslant 0 \tag{15}$$

其中 $y_0 \in K$ 是一给定元素。若上式不成立，则存在 $y\in\partial B_{M_1}\cap K, \lambda_0 \geqslant 0$ 使得 $y = Ay+\lambda_0 y_0$，从而 $\|y\| = \|Ay+\lambda_0y_0\| \geqslant \|Ay\|$ 然而由条件（H6）知

$$(Ay)(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=0}^{T}G(t,s)f*(s,y) > \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=0}^{T}\frac{(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}(\nu+T-s-1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}\cdot \left[\sum_{s=0}^{T}\frac{(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}(\nu+T-s-1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)-(\nu+T)^{\overline{\nu-1}}}\right]^{-1}M_1 = M_1$$

这表明 $\|Ay\| > \|y\| = M_1, y\in\partial B_{M_1}\cap K$ 矛盾。从而式（15）成立。再由引理 1 知

$$i(A,B_{M_1}\cap K,K) = 0 \tag{16}$$

结合式（14）和式（16），有

$$i(A,(B_R\setminus\overline{B}_{M_1})\cap K,K) = i(A,B_R\cap K,K) - i(A,B_{M_1}\cap K,K) = 1-0=1\neq 0$$

从而在 $(B_R \setminus \overline{B}_{M_1}) \cap K$ 中，算子 A 至少有一个不动点，即问题（8）有一个超过 w 的解 y，这也表明 $y-w$ 是问题（1）的正解。证毕。

参考文献：

[1] 郑祖庥. 分数微分方程的发展和应用[J]. 徐州师范大学学报(自然科学版), 2008, 26(2): 1-10.
ZHENG Z X. On the developments and applications of fractional differential equations [J]. Journal of Xuzhou Normal University (Natural Science Edition), 2008, 26(2): 1-10.

[2] 程金发. 分数阶差分方程理论[M]. 厦门: 厦门大学出版社, 2011.

[3] ATICI F M, ELOE P W. A transform method in discrete fractional calculus [J]. International Journal of Difference Equations, 2007, 2(2): 165-176.

[4] GOODRICH C S. On a first-order semipositone discrete fractional boundary value problem [J]. Archiv der Mathematik, 2012, 99(6): 509-518.

[5] GOODRICH C S. On discrete sequential fractional boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 2012, 385(1): 111-124.

[6] FERREIRA R A C. Existence and uniqueness of solution to some discrete fractional boundary value problems of order less than one [J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2013, 19(5): 1-7.

[7] LV Z, GONG Y, CHEN Y. Multiplicity and uniqueness for a class of discrete fractional boundary value problems [J]. Applications of Mathematics, 2014, 59(6): 673-695.

[8] 王金华,向红军. 一类分数阶差分方程边值问题多重正解的存在性[J]. 高校应用数学学报,2016, 31(2): 167-175.
WANG J H, XIANG H J. Existence of multiple positive solutions for a boundary value problem of fractional difference equation [J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2016, 31(2): 167-175.

[9] 王金华,向红军,赵育林. 一类非线性分数阶差分方程边值问题解的存在性及 Ulam 稳定性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(2): 1-6.
WANG J H, XIANG H J, ZHAO Y L. Existence and Ulam stability of solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional difference equation [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55(2): 1-6.

[10] 袁利国. 分数阶时滞广义 Logistic 方程解的研究[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2014, 53(2): 44-48.
YUAN L G. Research on solutions of fractional-order generalized logistic equation with delay [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2014, 53(2): 44-48.

[11] 杨志林. 非线性二阶常微分方程 Robin 问题的正解[J]. 青岛理工大学学报, 2013, 34(1): 5-15.
YANG Z L. Positive solutions of the Robin problem for nonlinear second-order ordinary differential equations [J]. Journal of Qingdao Technological University, 2013, 34(1): 5-15.

(上接第 22 页)

[8] ZHU G H, FU X C, CHEN G R. Global attractivity of a network-based epidemic SIS model with nonlinear infectivity [J]. Communication in Nonlinear Science Numerical Simulation, 2012, 17(6): 2588-2594.

[9] FERREIRA S, CASTELLANO C, PASTOR-SATORRAS R. Epidemic thresholds of the susceptible-infected-susceptible model on networks: a comparison of numerical and theoretical results [J]. Physical Review E, 2012, 86(4): 041125.

[10] LI T, WANG Y M, GUAN Z H. Spreading dynamics of a SIQRS epidemic model on scale-free networks [J]. Communication in Nonlinear Science Numerical Simulation, 2014, 19(3): 686-692.

[12] LI C. Dynamics of a network-based SIS epidemic model with nonmonotone incidence rate [J]. Physica A, 2015, 427: 234-243.

[13] WEI X D, LIU L J, ZHOU W S. Global stability and attractivity of a network-based SIS epidemic model with nonmonotone incidence rate [J]. Physica A, 2017, 469: 789-798.

[14] HUO J J, ZHAO H Y. Dynamical analysis of a fractional SIR model with birth and death on heterogeneous complex networks [J]. Physica A, 2016, 448: 41-56.

[15] 丁金凤, 金世欣, 张毅. 基于 Caputo 导数下的含时滞的 Hamilton 系统的分数阶 Noether 理论[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(6): 79-85.
DING J F, JIN S X, ZHANG Y. Fractional Noether theorems for Hamilton system with time delay based on Caputo dervitaves [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55(6): 79-85.

[16] AGUILA-CAMACHO N, DUARTE-MERMOUD M A, GALLEGOS J A. Lyapunov functions for fractional order systems [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19(9): 2951-2957.